

## 7. Гиперболани ясаш. Декарт репериди

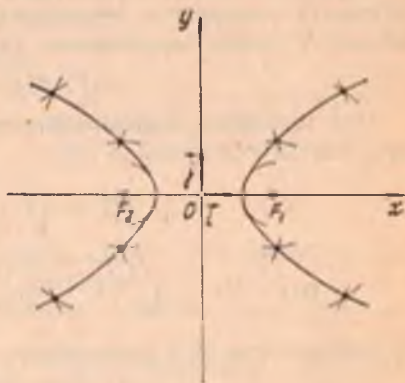
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламаси бўйича гиперболани ясаш масаласини қарайлик. Аввало бу тенглама бўйича унинг  $A_1(a, 0)$ ,  $A_2(-a, 0)$  учларини ва  $c^2 = a^2 + b^2$  муносабатдан фойдаланиб  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  фокусларини топамиз.  $F_1$  фокусни марказ қилиб, ихтиёрий  $r_1$  радиусли  $S(F_1, r_1)$  айлана,  $F_2$  фокусни марказ қилиб,  $r_2 = r_1 + 2a$  радиусли  $S(F_2, r_2)$  айлана чизамиз. Бу икки айлананинг кесишган нуқталари гиперболада ётади, чунки бу нуқталар учун

$$|r_2 - r_1| = |r_1 + 2a - r_1| = 2a.$$

Марказларнинг уринлари алмаштирилса, гиперболанинг яна икки нуқтаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб,  $r_1$  нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболанинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин.

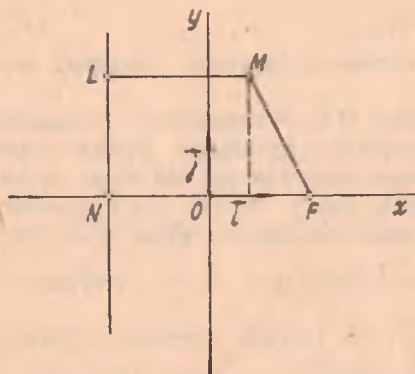
Шу усулда етарлича нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, гиперболанинг шакли 139-чизмадагидек тахмин қилинади.



139- чизма

## 50- §. Парабола

1. Таърифи. Каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан берилган нуқтагача ва берилган тўғри чизиқгача бўлган масофалари ўзаро тенг бўлган барча нуқталар тўплами *парабола* деб аталади. Берилган нуқта берилган тўғри чизиқда ётмайди деб олинади. Берилган нуқта *параболанинг фокуси*, берилган тўғри чизиқ эса *параболанинг директрисаси* дейилади.



140- чизма

Параболанинг фокуси ва директрисасини мос равишда  $F$  ва  $d$  билан, фокусдан директрисагача бўлган масофани  $p$  билан белгиләймиз. Таърифдан фойдаланиб, парабола тенгламасини келтириб чиқарайлик: бунинг учун декарт реперини қуйидагича танлаймиз: абсциссалар ўқи деб  $F$  нуқтадан ўтувчи ва  $d$  тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни қабул қиламиз, унинг мусбат

иуналиши 140- чизмада кўрсатилгандек бўлиб, абсциссалар ўқининг  $d$  тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси  $N$  бўлсин. Ординаталар ўқини  $FN$  кесманинг ўртасидан ўтказамиз. Танланган реперда директриса тенгламаси  $x = -\frac{p}{2}$ ,  $F$  фокус эса  $+\frac{p}{2}$ ,  $O$  координаталарга эга бўлади.

Параболанинг ихтиёрий нуқтаси  $M(x, y)$  бўлсин.  $M$  нуқтадан директрисага туширилган перпендикулярнинг асосини  $L$  билан белгилейлик. У ҳолда параболанинг таърифига кўра

$$\rho(F, M) = \rho(L, M). \quad (41)$$

(41) тенгликни координаталарда ифодаalayлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\rho(F, M) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$\rho(L, M) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу қийматларни (41) муносабатга қўямиз:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (42)$$

(42) тенглама параболанинг танланган реперга нисбатан тенгламасидир, чунки уни фақат параболада ётган нуқталарнинг координаталаригина қаноатлантиради.

(42) тенгламани соддароқ кўринишга келтирамыз. Бунинг учун унинг иккала томонини квадратга кўтариб, ихчамлаймиз:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ ёки } x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \\ &= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

бундан

$$y^2 = 2px. \quad (43)$$

(43) тенгламани (42) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқардик.

Энди ўз навбатида (42) тенгламани (43) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун координаталари (43) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта параболага тегишли эканини кўрсатиш kifоя.  $M_1(x_1, y_1)$  нуқтанинг координаталари (43) тенгламани қаноатлантирсин, яъни  $y_1^2 = 2px_1$

сонли тенглик бажарилсин. Шу билан бирга  $x = -\frac{p}{2}$  тенгламага

эга бўлган  $d$  тўғри чизиқ ва  $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$  нуқта берилган бўлсин.

$M_1$  нуқтанинг  $F$  ва  $d$  дан бир хил масофада туришини кўрсатишимиз керак:

$$\rho(F, M_1) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}.$$

ва

$$\rho(L, M_1) = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу тенгликларга  $y_1^2 = 2px_1$  ни қўйсак,

$$\begin{aligned}\rho(F, M_1) &= \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} \\ &= \left|x_1 + \frac{p}{2}\right| = \rho(L, M_1).\end{aligned}$$

Бундан  $\Rightarrow M_1$  нуқта параболага тегишли. Демак, (43) парабола тенг-ламаси бўлиб, у *каноник тенглама* дейилади.

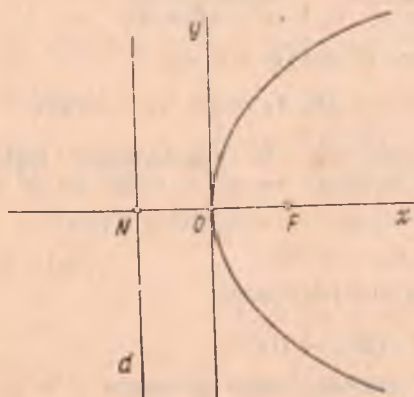
2. Парабола шакли. Параболанинг шаклини унинг (43) тенг-ламасига кўра текшираимиз.

$y^2 \geq 0$  ва  $p > 0$  бўлгани учун  $y^2 = 2px$  тенгламада  $x \geq 0$  бўли-ши керак. Бундан (43) параболанинг барча нуқталари ун-г ярим те-кисликда жойлашганлиги келиб чиқади;

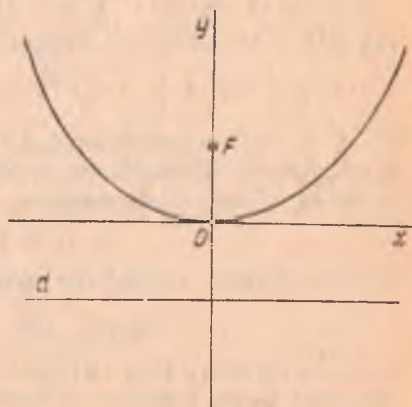
$x = 0$  да (43)  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$  парабола координаталар бошидан ўтади. Координаталар боши параболанинг *учи* дейилади;

$x$  нинг ҳар бир  $x > 0$  қийматига  $y$  нинг ишоралари қарама-қар-ши, аммо абсолют миқдорлари тенг бўлган икки қиймати мос кела-ди. Бундан параболанинг  $Ox$  ўққа нисбатан симметрик жойлашган-лиги аниқланади.  $Ox$  ўқ параболанинг *симметрия ўқи* дейилади. У шу билан бир вақтда параболанинг *фокал ўқи* ҳамдир,

(43)  $\Rightarrow y = \pm \sqrt{2px}$ . Бу тенгламадан кўринадики,  $x$  ортиб борса,  $|y|$  ҳам ортиб боради, яъни  $x \rightarrow +\infty$  да  $|y| \rightarrow +\infty$ . Кўрсатилган бу хоссаларга асосланиб параболанинг шаклини 141-чизмадагидек тахмин қилиш мумкин.

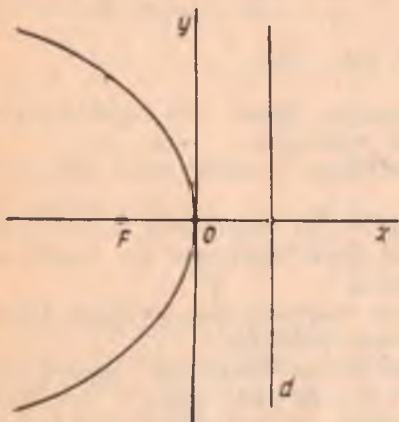


141- чизма

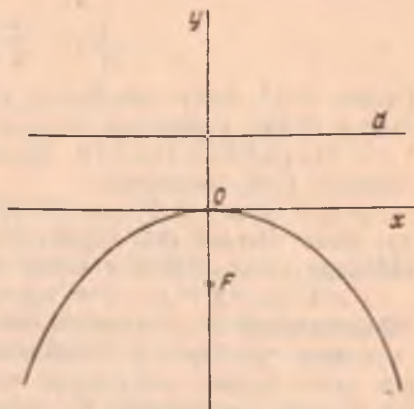


142- чизма

Параболанинг тенгламасини ҳосил қилиш учун декарт реперини махсус танладик, яъни  $Ox$  ўқни фокус орқали директрисага перпендикуляр қилиб ўтказдик. Агар декарт реперини бошқача усулда танласак, албатта, параболанинг тенгламаси ҳам (43) кўринишдан фарқли бўлади. Масалан, агар парабола координаталар системасига нисбатан 142- чизмада кўрсатилгандек жойлашган бўлса, унинг тенгламаси  $x^2 = 2py$  кўринишда бўлади. 143 ва 144- чизмаларда тасвирланган параболанинг тенгламалари мос равишда  $y^2 = -2px$ ,  $x^2 = -2py$  кўринишда бўлади.



143- чизма



144- чизма

Мисол.  $y^2 = 4x$  параболада фокал радиусининг узунлиги 26 бўлган нуқтани топинг.

Ечиш. Изланган  $M(x, y)$  нуқта учун  $\rho(F, M) = 26$ .  $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$ ,  $y$  ҳолда

$$F(1, 0); 26 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4x}$$

ёки  $676 = x^2 + 2x + 1$ , бундан  $x^2 + 2x - 675 = 0$ .

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 675} = -1 \pm 26, x_1 = 25, x_2 = -27.$$

$x_2 = -27$  илдиз ярамайди, чунки  $y^2 = 4x$  параболадаги барча нуқталарнинг абсциссалари мусбат бўлиши керак.  $x_1 = 25$  ни  $y^2 = 4x$  га қўйиб,  $y$  ни топамиз:

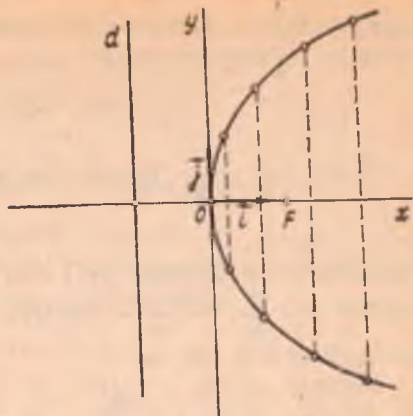
$$y_1 = +10, y_2 = -10.$$

Шундай қилиб, изланаётган нуқталар иккита экан:

$$M_1(25, 10), M_2(25, -10).$$

3. Параболани ясаш. Парабола декарт репериди  $y^2 = 2px$  тенглама билан берилган бўлсин. Аввало параболанинг фокусини ва директрисасини ясаймиз, бунинг учун  $Ox$  ўқда координаталар боши-

дан ўнгда ва чапда узунлиги  $\frac{p}{2}$  га тенг бўлган  $OF$  ва  $OK$  кесмаларни оламиз.  $K$  нуқта орқали  $Ox$  ўққа перпендикуляр қилиб  $d$  тўғри чизиқни ўтказамиз.  $F$  нуқта параболанинг фокуси,  $d$  эса директрисаси бўлади (145-чизма). Фокусдан бошлаб параболанинг симметрия ўқиға перпендикуляр ва ҳар бири олдингисидан  $\frac{p}{2}$  ма-



145-чизма

софада турувчи тўғри чизиқларни ўтказамиз. Ўтказилган тўғри чизиқларнинг ҳар биридан директрисагача бўлган масофани радиус қилиб,  $F$  марказли айлана чизамиз. Бу айлана тегишли тўғри чизиқни парабола ўқиға симметрик бўлган икки нуқтада кесади. Булар параболанинг нуқталаридир. Бу жараёни кераклича давом эттириб, параболанинг кераклича нуқталарига эга бўламиз. Уларни туташтириб параболанинг графигини ҳосил қиламиз.

4.  $y = ax^2 + bx + c$  тенглама билан берилган парабола.

Теорема. Ушбу

$$y = ax^2 + bx + c \quad (44)$$

тенглама симметрия ўқи ординаталар ўқиға параллел ва учи  $O' \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  нуқтада бўлган параболанинг тенгламасидир.

Исбот. (44) тенгламачинг ўнг томонидан тўла квадрат ажратамиз.

$$y = a \left( x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Бундан

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2. \quad (45)$$

Декарт реперининг координаталар бошини  $O' \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  нуқтага

$$\begin{cases} x = x' - \frac{b}{2a}, \\ y = y' + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

формула бўйича параллел кўчирамиз. Янги реперда (45) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y' = ax'^2 \text{ ёки } x'^2 = \frac{1}{a} y'. \quad (46)$$

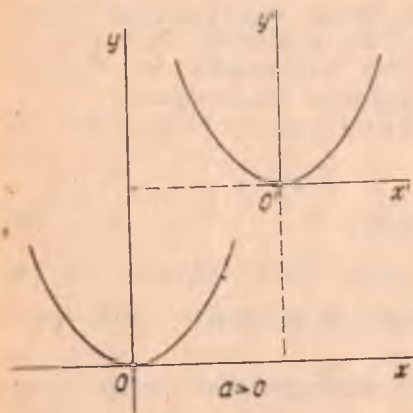
Ушбу  $p = \frac{1}{2|a|}$  белгилашни киритиш билан

$$x'^2 = 2py' \quad (47)$$

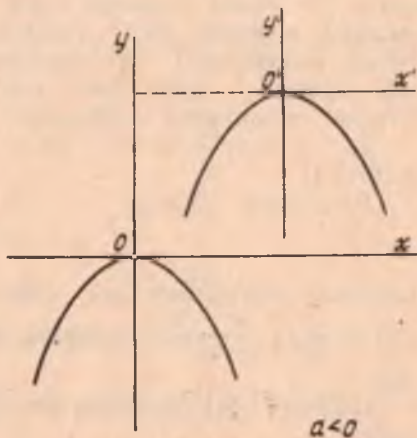
тенгламага эга бўламиз. (47) тенглама симметрия ўқи  $O'y'$  ўқ ва учи  $O' \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$  нуқтада бўлган параболани ифодалайди.

Бу ерда  $O'y' \parallel Oy$ . ▲

Шундай қилиб,  $y = ax^2 + bx + c$  параболани яшаш учун  $x^2 = \frac{1}{a} y$  параболани ясаб, унинг учини  $O' \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$  нуқта устига тушгунча параллел кўчириш керак.



146-а чизма



146-б чизма

146-а ва б чизмада  $a$  параметр мусбат ва манфий бўлган ҳоллар учун  $y = ax^2 + bx + c$  парабола тасвирланган.

Мисол.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$  парабола тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва янги координаталар бошининг координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 \text{ ёки } y-1 = \frac{1}{2}(x+2)^2;$$

координаталар бошини  $O'(-2, 1)$  нуқтага

$$\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

формула бўйича параллел кучирамиз. Янги реперда парабола тенгламаси  $y' = \frac{1}{2} x'^2$  ёки  $x'^2 = 2y'$  каноник кўринишни олади.  $O'(-2, 1)$  нуқта янги координаталар боши.

### 51- §. Эллипс ва гиперболанинг директрисалари

Таъриф. Эллипс (гипербола) нинг берилган  $F$  фокусига мос директрисаси деб, унинг фокал ўқиға перпендикуляр ва марказидан шу  $F$  фокуси ётган томонда  $\frac{a}{e}$  масофада турувчи тўғри чизиқни айтилади. Бу ерда  $a$  — эллипс (гипербола) нинг катта (хақиқий) ярим ўқи,  $e$  — эксцентриситети.

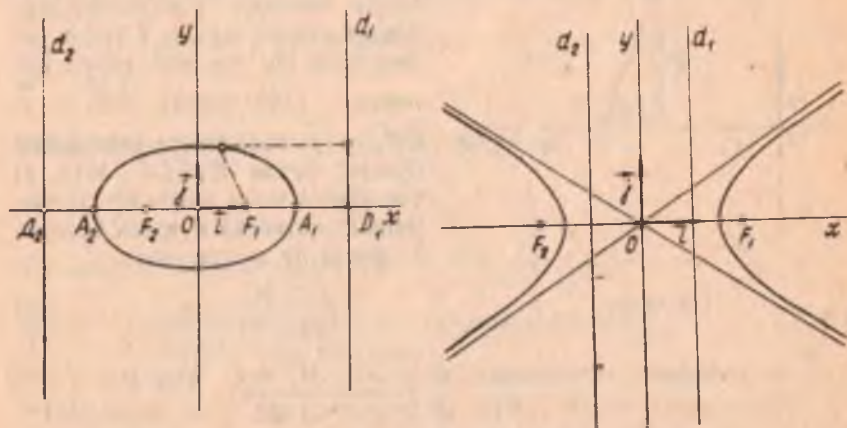
Директрисаларни  $d_1, d_2$  билан белгилаймиз ҳамда уларни  $F_1, F_2$  фокусларга мос директрисалар деб атаймиз. Директриса таърифига кўра эллипс (гипербола) нинг тенгламаси каноник кўринишни оладиган қилиб махсус танланган декарт репериди  $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$  фокусларга мос директрисалари

$$d_1: x - \frac{a}{e} = 0,$$

$$d_2: x + \frac{a}{e} = 0$$

тенгламаларга эга бўлади. Эллипс учун  $e < 1 \Rightarrow \frac{a}{e} > a$ , гипербола учун  $e > 1 \Rightarrow \frac{a}{e} < a$ . Демак, эллипснинг ҳам, гиперболанинг ҳам директрисалари уларни кесмайди (147- чизма).

Эллипс (гипербола) директрисаларининг аҳамияти қуйидаги тесрема билан белгиланади.



147- чизма